Векторний аналіз

№50(б)

$$\oint (\bar a\cdot \bar r)\,\bar n\, dS = \bar J\cdot \bar b$$

$$\int_V \operatorname{div}\bar A\, dV = \oint_S \bar A_n\, dS$$

$$\bar J\cdot\bar b = \oint_S(\bar a\cdot\bar r)(\bar b\, \bar n)\,dS = \int_V \operatorname{div}\underbrace{(\bar a\cdot\bar r)\,\bar b}_{A}\, dV =$$

$$\operatorname{div}\bar A = \operatorname{div}(a_x x + a_y y + a_z z)(b_x\, b_y\, b_z) = \frac{\partial}{\partial x}(b_x a_x x + b_x a_y y + b_x a_z z) + \frac{\partial}{\partial y}(b_y a_x x + b_y a_y y + b_y a_z z) + \frac{\partial}{\partial z}(b_z a_x x + b_z a_y y + b_z a_z z) = (b_x a_x + b_y a_y + b_z a_z) =$$

$$= \bar b\cdot\bar a \Rightarrow \; = \int_V \bar b\,\bar a\, dV = \bar b\,\bar a\int dV = \bar b\,\bar a\, V$$

$$\bar J = \bar a\cdot V$$

№52

$$x\Delta \bar U = -\oint \rho g h\, dS = -\rho g \int h\, dS = -\rho g \int \operatorname{grad} h\, dV =$$

$$= -\rho g\, \vec e_z \int dV = -\rho g V \vec e_z$$

№27

а) $\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{lmn} = \delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km}$

$$\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{k} \\ \delta_{ll} & \delta_{lm} & \delta_{ln} \end{vmatrix} = \delta_{il}(\delta_{km}\delta_{ln} - \delta_{kn}\delta_{lm}) +$$

$$+\delta_{im}(\delta_{km}\delta_{ll} - \delta_{kl}\delta_{ln}) + \delta_{in}(\delta_{ki}\delta_{lm} - \delta_{km}\delta_{ll}) =$$

$$= \delta_{km}\delta_{in} - \delta_{kn}\delta_{im} + 3\delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{im}\delta_{kn} + \delta_{in}\delta_{kn} - 3\delta_{in}\delta_{km} =$$

$$= \delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km}$$

б) $\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{klm} = 2\delta_{im}$

$$\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{klm} \begin{vmatrix} \delta_{ik} & \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{kk} & \delta_{kl} & \delta_{km} \\ \delta_{lk} & \delta_{ll} & \delta_{lm} \end{vmatrix} = \delta_{ik}(\delta_{kl}\delta_{lm} - \delta_{km}\delta_{ll}) -$$

$$-\delta_{il}(\delta_{kk}\delta_{lm} - \delta_{km}\delta_{lk}) + \delta_{im}(\delta_{kk}\delta_{ll} - \delta_{kl}\delta_{lk}) =$$

$$= -2\delta_{im} - 2\delta_{im} + 6\delta_{im} = 2\delta_{im}$$

№32(в, г)

в) $\overline{n_i n_k n_e} = 0$

г) $\overline{n_i n_k n_e n_m} = C(\delta_{ik}\delta_{em} + \delta_{ie}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{ke})$

$\overline{n^2} = 1 = 15C \Rightarrow C = \frac{1}{15}$

№33(в, г, е)

в) $\overline{(a\cdot n)n} = j$

$\hat{j} = \overline{a_j n_j n_i} = a_j \overline{n_i n_j} = \frac{1}{3} a_i \delta_{ij} = \frac{1}{3} a_i$

г) $\overline{(a\times n)^2} = \overline{[a_i\times n_i]\cdot[a_j\times n_j]} = \overline{(n_i\times[a_j\times n_j])\cdot a_i} =$

$=(a_j(\overline{n_i n_j}) - n_j(\overline{n_i a_j}))a_i = (\frac{1}{3} a_j\delta_{ij} + \frac{1}{3} a_j \delta_{ij})a_i =$

$=\frac{2}{3} a_i a_j = \frac{2}{3} a^2$

е) $\overline{(a\times n)(b\times n)} = (\overline{[a_i\times n_i][b_j\times n_j]}) = \overline{(b_i(n_i n_j) -}$

$\overline{- n_j(n_i b_i))a_i} = (\frac{1}{3} b_i\delta_{ij} + \frac{1}{3} b_i\delta_{ij}) = \frac{1}{3} ab$

№581 Спеціальна теорія відносності

$A'B' = l_0$

Світло від A'B' досягає бистріше E'F'; $\Delta t = \frac{l_0}{c}$,

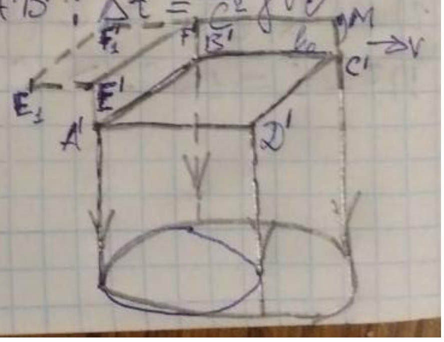
і E'F' здвигається на $\frac{Vl_0}{c} \Rightarrow \frac{V}{c} = \beta$

Світло йде швидше від C'D' до A'B': $\Delta t = \frac{1}{c^2}\gamma V l$

де $l = \gamma(\Delta x' - V\Delta t')$

а $\Delta x' = l_0 \Rightarrow l = l_0\sqrt{1-\beta^2}$

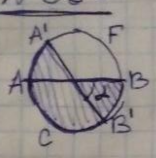
довжина BC і AD



BC і AD $= l_0$

FB і EA $= \beta$

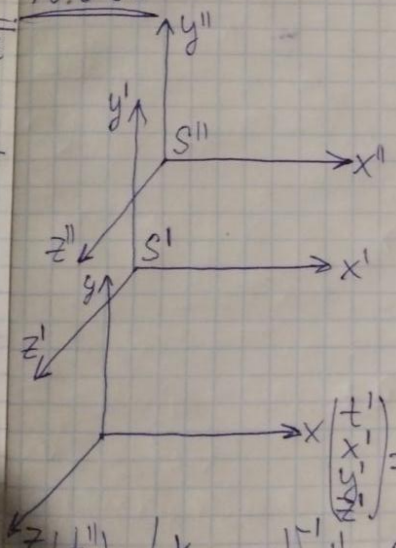
№583



Світло від $A'CB'$ буде досягати пластини швидше за $A'FB'$

$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$ (за рахунок скорочення Лоренца)

№600



$$S'': \begin{cases} t'' - \gamma' t' - v\gamma' x' \\ x'' = \gamma x' - v\gamma' t' \\ y'' = y \\ t' = t \end{cases}$$

$$S': \begin{cases} t' = \gamma t - v\gamma x \\ x' = \gamma v - v_\gamma t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t'' \\ x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -v'\gamma' & 0 & 0 \\ -v\gamma' & \gamma' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma' & -v\gamma' & 0 & 0 \\ -v\gamma' & \gamma' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma' + vv'\gamma\gamma' & -v\gamma\gamma' - v\gamma\gamma' & 0 & 0 \\ \gamma - v'\gamma\gamma - v\gamma\gamma' & vv\gamma\gamma' - \gamma\gamma' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$